Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2018

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za IX razred osnovne škole

1. Odrediti rješenja sistema jednačina:

$$ab = 2(a+b) - 4$$
$$a^2 + b^2 = 4.$$

Rješenje: Pomnožimo prvu jednačinu sa 2 i dodajmo drugoj. Dobijamo:

$$(a+b)^2 = 4(a+b) - 4 \quad \Longrightarrow \quad (a+b-2)^2 = 0 \quad \Longrightarrow a+b=2 \quad \Longrightarrow a = b-2.$$

Sada iz $ab = 2(a+b) - 4$ i $a+b=2$ dobijamo

$$b(b-2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad b=0 \ \text{ ili } \ b=2$$

odakle vidimo da postoje dva para rješenja sistema:

$$(2,0) \ \text{ i } \ (0,2).$$

2. Ako postoji $a \in \mathbf{N}$, $a \geq 2$, takav da

$$a \big| 2^{2018} - 1 \ \text{ i } \ a \big| 2^{4039} - 1,$$

naći ga. U suprotnom dokazati da takvo a ne postoji.

Rješenje: Pretpostavimo da takvo a postoji. Kako a dijeli i $2^{4039} - 1$ i $2^{2018} - 1$ to je a neparan broj koji dijeli i njihovu razliku:

$$a \big| 2^{4039} - 2^{2018} = 2^{2018}(2^{2021} - 1) \quad \Longrightarrow \quad a \big| 2^{2021} - 1.$$

Slično prethodnom, kombinujući djeljivost $2^{2021}-1$ i $2^{2018}-1$ sa a, vidimo da

$$a \big| 2^{2018}(2^3-1) \implies a \big| 7 \implies a = 7.$$

Ostaje da provjerimo da li broj $7 \big| 2^{2018}-1$ i $7 \big| 2^{4039}-1$

Kako je $2^{2018} = (2^3)^{672} \cdot 4$, to je ostatak pri dijeljenju broja 2^{2018} sa 7 jednak 4, pa 7 ne dijeli $2^{2018}-1$.

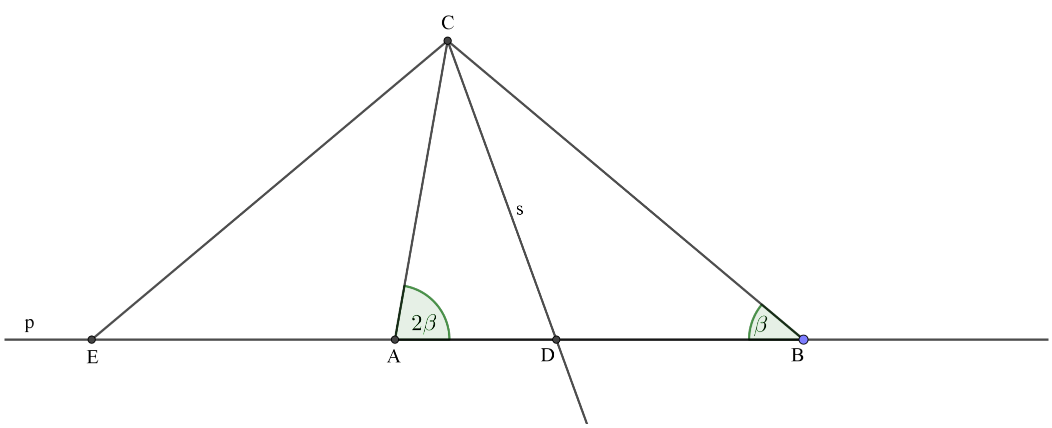
Zaključak: ne postoji $a \in \mathbf{N}$, $a \geq 2$, takav da

$$a \big| 2^{2018}-1 \text{ i } a \big| 2^{4039}-1.$$

3. U trouglu ABC ugao kod tjemena A je dva puta veći od ugla kod tjemena B. Simetrala ugla kod tjemena C siječe duž AB u tački D. Dokazati da važi:

$$|BC| = |AD| + |AC|.$$

Rješenje:



1. način: Kroz tjeme A produžimo stranicu AB do tačke E tako da važi $|AE| = |AC|$, to jeste

$$|ED| = |AD| + |AC|.$$

Treba pokazati da je $|ED| = |BC|$.

Trougao ΔEAC je jednakokraki sa kracima AE i AC, odakle zaključujemo da je $\angle AEC = \angle ECA = \beta$, pa je $|EC| = |BC|$.

Kako je prava s simetrala ugla $\angle ACB$, to važe jednakosti:

$$\angle ECD = \beta + \frac{1}{2}\angle ACB \text{ i } \angle ADC = \beta + \frac{1}{2}\angle ACB$$

Dakle, trougao ΔEDC je jednakokraki pa je $|ED| = |EC| = |BC|$.

2. način: Iz tjemena C povucimo pravu koja pravu $p(AB)$ siječe u tački E tako da je trougao ΔEBC jednakokraki ($EC = BC$) pri čemu je tačka A izmedju tačaka E i B. Sada se, kao i u prethodnom načinu rješavanja, vidi da su trouglovi ΔEAC i ΔEDC jednakokraki i da važi:

$$|BC| = |CE| = |ED| = |EA| + |AD| = |AC| + |AD|.$$

4. U tablicu dimenzije 10×10 upisani su brojevi od 0 do 99 kao na slici:

0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99

Dunja je ispred pola od njih upisala znak $-$ tako da je u svakoj koloni i svakoj vrsti znak $-$ postavila ispred tačno 5 brojeva (to jeste u tačno 5 polja. Na kraju je sabrala sve brojeve dobijine u ovoj tabeli. Koje brojeve je Dunja mogla dobiti kao zbirove?

Rješenje: Primijetimo prvo da se zbir ma kojih n cijelih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sa najviše dvije cifre može dobiti kao zbir $D + J$, gdje je D zbir svih desetica, a J zbir svih jedinica ovih n brojeva. Na primjer: $13 + 5 - 27 + 46 = (10 - 20 + 40) + (3 + 5 - 7 + 6)$.

Vratimo se sada na naš zadatak. Označimo sa D zbir desetica svih 100 cijelih brojeva koji su se, po završenom procesu dopisivanja znakova $-$, našli u tabeli, a sa J zbir njihovih jedinica.

Kako je u svakoj koloni broj pozitivnih brojeva jednak broju negativnih, zbir desetica po kolonama je 0, pa je $D = 0$. Slično, zbir jedinica u svakoj od 10 vrsta je 0, pa je i $J = 0$.

Dakle, jedini broj koji je Dunja mogla dobiti kao zbir je 0.